

# 제어 시스템의 안정성 기준

전자 분야에 있어서 오실레이터는 자체적으로 사인파 신호를 발생시킬 수 있는 회로이다. 다양한 회로 구성에서 오실레이터를 동작시키는 것은 전자 회로에 내재된 잡음 레벨을 포함한다는 뜻이다. 전원 인가 시 잡음 레벨이 증가하면서 발진이 시작되며 자체적으로 유지된다.

CHRISTOPHE BASSO ON Semiconductor

그림 1과 같이 블록의 조립에 의해 이루어진 구성은 이번 제어 시스템 배치와 매우 유사한 형태이다.

여기서의 여자 입력은 잡음이 아닌, 오실레이터를 구동시키기 위한 입력 변수로서의 전압 레벨  $V_{in}$ 이다. 복귀 경로는  $G(s)$  블록으로 구성되며, 직접 경로는 전달 함수  $H(s)$ 로 구성된다.

시스템을 분석하기 위해 입력 변수 대비 출력 전압으로 표시한 전달 함수를 작성해 본다.

$$V_{out}(s) = \epsilon(s)H(s) = [V_{in}(s) - G(s)V_{out}(s)]H(s) \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)과  $V_{out}(s)$  인수를 확장하면 다음과 같이 된다.

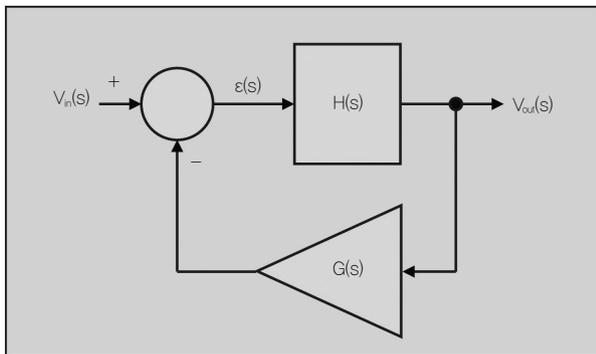


그림 1. 오실레이터는 여러 신호가 반대편 출력 신호의 변화를 가져오지 않는 제어 시스템이다

$$V_{out}(s)[1 + G(s)H(s)] = V_{in}(s)H(s) \dots\dots\dots (2)$$

따라서 이와 같은 시스템의 전달 함수는 다음과 같이 된다.

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} \dots\dots\dots (3)$$

이 식에서  $G(s)H(s)$  곱셈은 루프 이득이라고 하며  $T(s)$ 로 표시하기도 한다.

이 시스템을 지속적인 오실레이터로 변환시키기 위해서는 입력 신호가 사라진 경우에도 출력 신호가 반드시 존재해야 한다. 이와 같은 목표를 달성하려면 식 (4)와 같은 조건이 충족되어야 한다.

$$\lim_{V_{in}(s) \rightarrow 0} \left[ \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} H_{in}(s) \right] \neq 0 \dots\dots\dots (4)$$

$V_{in}$ 이 사라진 상태에서 이 방정식을 만족시키기 위해서는 몫이 무한대가 되어야 한다. 몫이 무한대가 되기 위한 조건은 특성 방정식  $D(s)$ 가 0으로 되어야 한다.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

여기서 이 조건을 만족시키려면  $G(s)H(s)$ 가 -1이 되어야 한다. 다르게 말하면, 루프 이득의 크기는 1이 되어야 하며, 그 부호는 마이너스가 되어야 한다. 사인파 신호의 부호 변

경은 단순히 180°의 위상 역전이다. 이 2개의 조건은 수학적으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$|G(s)H(s)|=1 \dots\dots\dots (6)$$

$$\arg G(s)H(s)=-180^\circ \dots\dots\dots (7)$$

이 2개의 식이 정확하게 충족되면 정상 상태 발전을 위한 조건이 갖춰진 것이다. 이것은 1921년, 동일한 이름의 독일 물리학자에 의해 발표된 소위 Barkhausen 기준이라고 한다. 실제로 컨트롤 루프 시스템에서 수정 신호는 출력에 영향을 끼치지 못하지만, 여자 신호로 동상의 정확히 동일한 양을 반환시킨다.

보데선도에서, (3.6)과 (3.7)은 0-dB 축을 통과하는 루프 이득 곡선을 포함하며, 바로 이 지점에서 180°의 위상 지연으로 영향을 받는다. 주파수 대비 루프 이득의 허수 및 실수 부분을 표시하는 나이퀴스트(Nyquist) 분석에서는 이 지점이 -1, j0 좌표에 해당된다.

**그림 2**는 발전을 위한 조건인 이들 2개의 곡선을 나타낸 것이다. 시스템이 이 값에서 약간이라도 편향되면(예를 들면 온도 변화, 이득 변화) 출력 발전은 '0'으로 지수함수적으로 감소하거나 상부/하부 전원 공급기 레일에 도달할 때까지의 진폭으로 수렴된다.

오실레이터의 경우, 설계자는 광범위한 동작 조건에서 발전 조건들을 만족시키기 위해 가능한 한 이득 마진을 감소시키고자 노력한다.

## ■ 안정성 기준

지금까지 제어 시스템의 목적은 오실레이터를 만들려는 것이 아니라는 것을 이해할 수 있었다. 우리가 원하는 것은 속도, 정밀성 및 발전 없는 응답을 가진 제어 시스템이다. 따라서 발전이나 수렴 조건이 되는 구성은 피해야 한다.

그 방법 중 하나는, 시스템이 반응하는 주파수 범위 내로 제한하는 것이다. 정의에 의해 페루프에서 입력 대비 출력이 3dB 떨어지는 지점의 해당 주파수가 주파수 범위 또는 대역폭으로 된다.

페루프 시스템의 대역폭은 시스템이 입력에 대해 만족스럽게 반응하는 주파수 범위라고 할 수 있다(즉, 설정 포인트를 따르거나 효과적으로 교란을 거부하는 범위).

나중에 설명하겠지만, 설계 단계에서는 페루프 대역폭을 직접 컨트롤하지 않지만 오픈 루프 분석에 해당되는 파라미터인 크로스오버 주파수  $f_c$ 는 컨트롤한다. 양쪽 변수는 때로 동일한 값으로 근사치를 갖기도 하며, 이것은 단 한 가지 경우에만 옳다는 것을 알 수 있다. 그러나 이들은 서로 멀리 떨어진 값이 아니며, 이 두 개의 용어는 논의 하에 상호 교환해서 사용할 수 있다.

여기까지 봤을 때 오픈 루프 이득은 제어 시스템에서 중요한 파라미터라는 것을 알 수 있을 것이다. 이득이 존재할 경우 (즉,  $|T(s)| > 1$ ), 시스템은 동적인 페루프 상태로 동작하

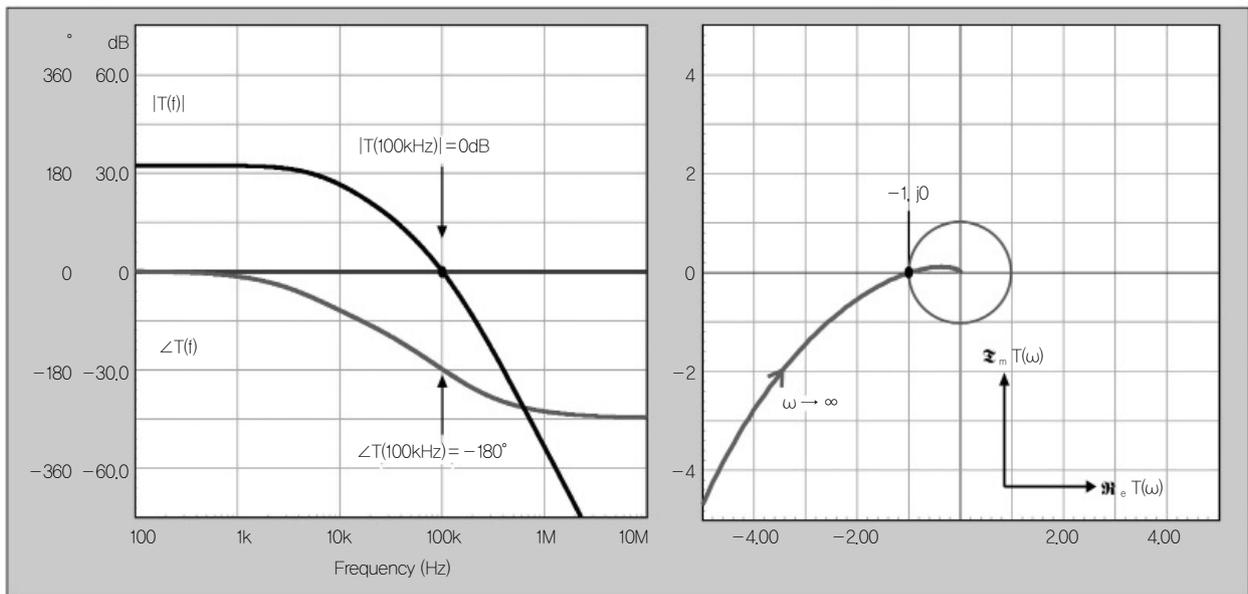


그림 2. 발전 조건은 보데 도면 또는 나이퀴스트 도면으로 표시할 수 있다

며 입력 교란을 보상하거나 설정값 변경에 반응할 수 있다.

그러나 시스템 반응에는 한계가 있다. 시스템은 교란 신호에 포함된 주파수에서 이득을 제공해야 한다. 설정 포인트 변경의 교란이 너무 빠른 경우, 여자 신호의 주파수 성분이 시스템의 대역폭 이상이 되어 이 주파수에서는 이득이 없게 되며, 시스템이 느려지고 반응하지 못할 뿐만 아니라 변하는 파형에 루프가 반응하지 않는 것처럼 동작한다.

그렇다면 무한 대역폭 시스템은 필요한 것인가? 답은 ‘그렇지 않다’이다. 왜냐하면 대역폭을 증가시키는 것은 갈때기의 직경을 넓히는 것과 같아서 더 많은 정보를 수집하고 입력되는 교란에 대해 더 빨리 반응하겠지만, 한편으로 시스템은 잡음과 기생 데이터, 경우에 따라 컨버터에 의해 자체적으로 발생한(예를 들면 스위칭 전원 공급장치의 출력 리플) 것과 같은 신호도 수용하게 되기 때문이다.

이와 같은 이유로 대역폭은 애플리케이션이 실제 요구하는 범위로 제한하는 것이 필수적이다. 너무 넓은 대역폭을 채용하는 것은 시스템의 잡음 면역성에 해로울 수 있다(예를 들면, 외부 기생 신호에 대한 견고성).

### ■ 대역폭 제한

제어 시스템의 대역폭을 어떻게 제한할 것인가? 보상 블록 G를 통한 루프 이득 곡선을 그림으로써 가능해진다. 이 블록은 특정 주파수  $f_c$  이후에서 루프 이득 크기  $|T(f_c)|$ 가

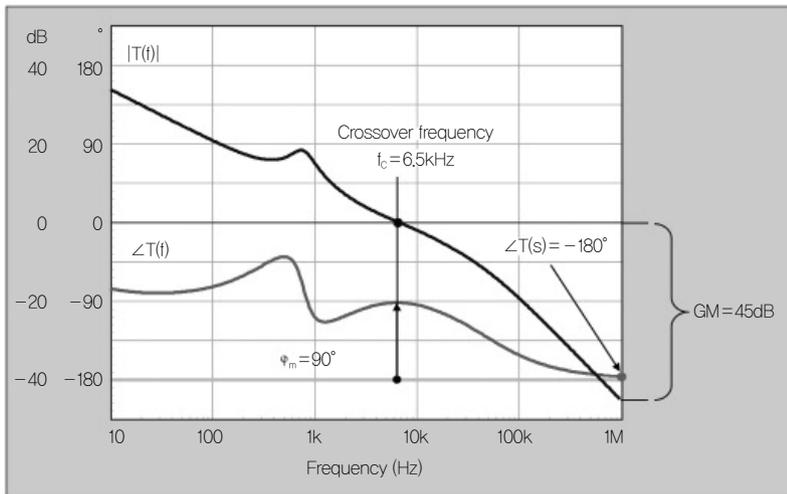


그림 3. 이 예에서 0-dB 크로스오버 지점은 6.5kHz에 있으며 전체 위상 지연은 90°의 위상 여유를 제공한다

떨어져 1 또는 0 dB를 통과하도록 한다.

앞에서 설명한 바와 같이, 이는 루프가 폐쇄되었을 때 제어 시스템의 대략의 대역폭이 된다. 이 현상이 생기는 주파수를  $f_c$ 로 표시하며 크로스오버 주파수라고 한다.

이것은 견고한 시스템을 획득하기 위해 충분한 것일까? 아니다. 여기서는 또 다른 중요한 파라미터를 확인할 필요가 있다.  $T(s)$ 의 위상은 그 크기가 1일 때  $-180^\circ$ 보다 작아야 한다.

실험에 의하면, 크로스오버 주파수에서 루프 위상이  $-180^\circ$  이하인 경우 안정적인 상태로 수렴하는 응답을 구했다. 이는 명백하게 바람직한 제어 시스템의 특성이다.

크로스오버 시  $-180^\circ$ 에서 떨어져 있도록 보장하기 위해서는 보상기  $G(s)$ 가 루프 인수를 조절하여 선택된 크로스오버 주파수에서 위상 여유 PM 또는  $\phi_m$ 을 구축하도록 해야 한다.

위상 마진은 외부 교란이나 피할 수 없는 생산 분포에도 불구하고, 루프 이득의 변화로 인해 안정성이 위협에 빠지는 것을 막도록 보장하는 설계 또는 안전 한계로 생각할 수 있다. 나중에 설명하겠지만, 위상 여유는 시스템의 과도 응답에도 영향을 미친다.

따라서 이와 같은 선택은 안정성에 대한 고려뿐만 아니라 원하는 과도 응답의 종류에도 의존한다. 위상 여유는 수학적으로 다음과 같이 정의한다.

$$\phi_m = 180 + \angle T(f_c) \text{ in degrees} \dots\dots\dots (8)$$

여기서 T는 종속 플랜트 H와 보상기 G 이득으로 이루어진 오픈 루프 이득을 나타낸다.

일반적으로 보상된 루프 이득 곡선은 그림 3과 같으며, 크로스오버 주파수는 6.5kHz를 나타낸다.

이 지점에서  $T(s)$ 의 위상은  $-90^\circ$ 이다. 6.5kHz 주파수의  $-180^\circ$ 에서 시작하여 + 방향으로 인수 파형을 지날 때까지 각도를 계산하면, 이 예에서의 위상 마진은  $90^\circ$ 가 된다.

이것은 극히 강건한 시스템으로, 무조건적 안정 상태라고 말할 수 있다. 이는 크로스오버 지점 주변의 웬만한 루프 이득의

변화에도 불구하고 위상 여유가 너무 작은 주파수를 교차할 가능성이 없다는 의미이다.

위상 여유가 30°에 근접할 정도로 너무 작은 경우, 이 한계 아래에서는 시스템이 수용할 수 없는 Ringing Response가 발생한다. 이러한 이유로, 30°에 비해 추가적인 여유를 부여하기 위해서 학교에서는 45°가 한계라고 배운 것이다. 나중에 우리는 이 수치에 분석적인 원인이 있다는 것을 알 수 있을 것이다.

### ■ 이득 여유와 조건부 안정성

그림 4는 다른 일반적인 보상 컨버터의 주파수 응답으로서 0-dB 크로스오버 지점과 함께 위상 여유를 나타내고 있다. 우리는 경험적으로 컨버터를 구성하는 요소들이 제품 수명 기간에 걸쳐 변동을 나타낸다는 것을 알고 있다. 이 변동은 자연적인 생산 분포 (예를 들면 로트 별 허용오차의 영향을 받는 저항 또는 콘덴서)와 관련된다.

컨버터의 동작 조건 환경도 부품에 영향을 미친다. 이와 같은 변수들 중에는 온도가 중요한 역할을 하며 수동 또는 능동 부품 파라미터에 영향을 미친다.

이것은 예를 들면 콘덴서 또는 인덕터 등가 직렬 저항 (ESR), 오픈 커플러 전류 전달비(CTR), 또는 2극 트랜지스터의 베타와 같다. 이러한 변동은 영향을 받는 파라미터에 따라 루프 이득을 상승 또는 감소시켜 영향을 끼친다.

이득 곡선이 변동되면 0-dB 크로스오버 주파수는 컨버터에 다른 대역폭을 가진 새로운 값으로 변화된다. 이와 같은 변경 하에서 컨버터 안정성은 어떻게 영향을 받을까?

위상 여유가 작은 지점에서 새로운 크로스오버가 발생한다면 오버슈트가 더 이상 수용할 수 없도록 과도 응답을 저하시킬 수 있다.

따라서 설계자로서는 -180° 한계에 도달하는 주파수에서 이와 같은 확산이 갑자기 이득을 증가시키지 않도록 보장할 책임을 갖게 된다. 즉, 식 (9)와 같이 정의되는 충분한 이득이 필요해진다.

$$GM = \frac{1}{|T(f_c)|} \dots\dots\dots (9)$$

이것은 정확히 -180° 또는 라디안인(그림 1에서 1MHz) 주파수 지점에 해당한다.

그림 4는 선택된 부품에서 생산 분포에 의한 ±10dB의 일반적인 이득 변동을 나타낸다. 이것은 크로스오버 주파수를 1.5kHz에서 30kHz로 이동시킨다. 이 지역에서의 위상 여유는 이론에 의한 안전 수치인 70°에서 45°로 변한다. 그렇다면 최악의 경우는 무엇일까? 이는 발진 조건과 일치하는 전체 위상 지연이 180°인 새로운 크로스오버 주파수가 발생할 때이다. 이 조건이 1MHz에서 발생하며 35dB의 플러스 이득 변화가 있다는 것을 나타낸다.

### ■ 대형 이득은 없음

다행스러운 점은, 35dB의 편차가 현대 전자회로에서는 거의 발생하지 않는다는 것이다. 이전에 증폭기나 서보 매커니즘이 진공관 기반 회로에 의해 구동될 때에는 전원 인가 시간 중의 율입 동안 대량의 루프 이득 변동이 발생했다. 따라서 안정성에 위협이 될 수 있는 2차 지점을 제한하기 위해 이득 규정이 필요하다.

전체 위상 지연이 -180°에 도달하는 주파수의 루프 이득 곡선에서 식별되는 이 이득 여유는 그림 3에 GM으로 표시했다. 루프 이득이 외부 파라미터에 대해 극도로 민감성을

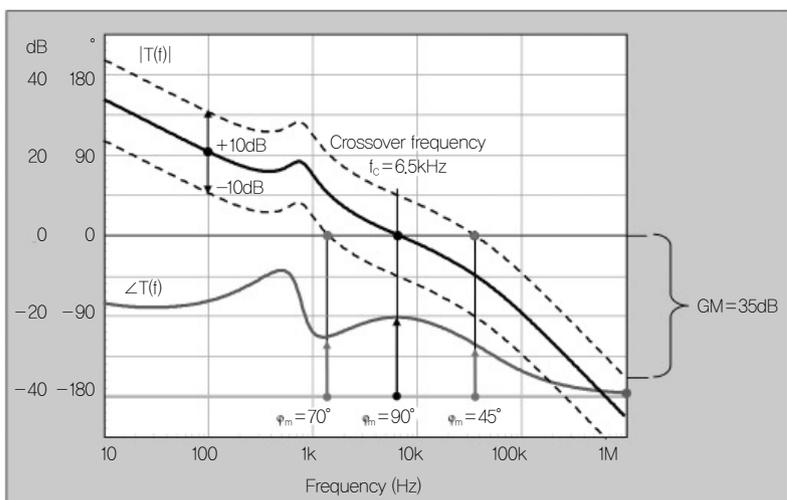


그림 4. 루프 이득은 온도와 같은 외부 파라미터에 민감성을 보일 수 있다. 변동이 발생하면 위상 여유는 항상 안전 한계 내에 있어야 한다

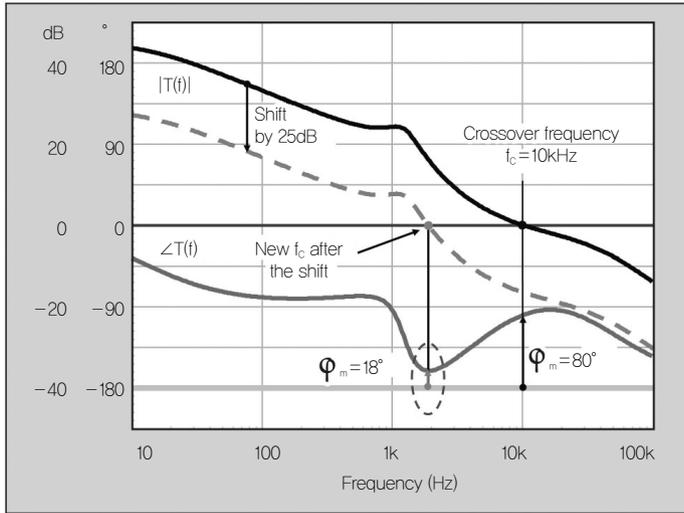


그림 5. 이 예에서 이득이 25dB 아래로 이동하면 위상 여유가 18°밖에 되지 않는 지점에서 곡선이 0dB 축을 통과한다. 이와 같이 낮은 위상 여유는 대량의 오버슈트에 영향을 받아 큰 발진 반응을 나타낼 수 있다. 이는 조건부 안정성의 경우이다

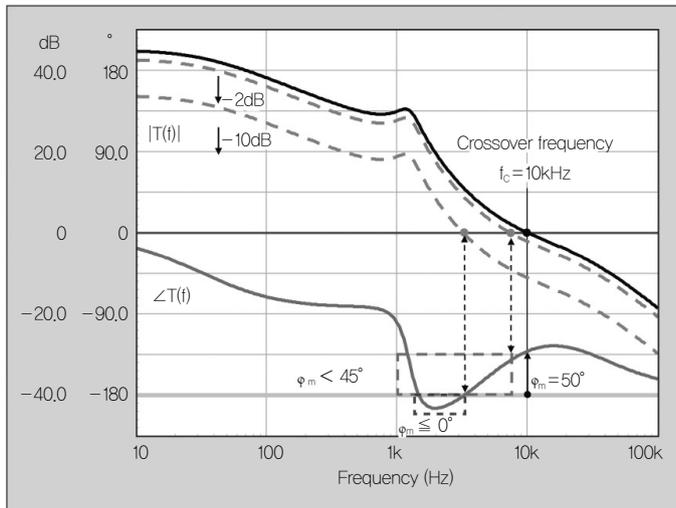


그림 6. 위상 지연이 180° 이상이지만 이득이 1 이상인 지역은 문제되지 않으며, 반응은 수용 가능하다

나타내지 않는 한, 현대의 전자회로에서 10dB을 초과하는 이득 여유라면 일반적으로 충분하다.

그림 5는 이득 이동의 다른 예이다. 이는 10kHz에서 80°의 위상 여유를 나타내는 다른 보상 컨버터이다. 지금까지 논의한 것에 따르면, 이득 변경이 발생할 수 있다는 것을 알고 있고, 이는 이득 곡선을 위/아래로 이동시킬 수 있다. 여기서는 위상 여유가 18°까지 작아지는 곳에서 약 2kHz의 지역을 확인할 수 있다.

20-25dB의 이득 감소가 있는 경우, 약 2kHz에서 위험하

게 낮은 위상 여유를 나타내는 컨트롤 시스템이 될 수 있다. 이것은 발진 반응을 초래하여 오버슈트 사양을 초과하게 될 수도 있다.

이와 같은 종류의 시스템은 조건부 안정이라고 한다. 다행히도 이전에 언급한 대로 이득의 25dB 변동은 흔치 않으며, 이러한 시스템은 이 이득 여유에서 강건한 것으로 간주된다.

그러나 최종 사용자가 조건부 설계는 수용할 수 없으며, 크로스오버 주파수 이하의 모든 지점에서 위상 여유가 60° 이상이 되도록 사양에 명백히 요구한 설계도 보았다. 이 경우, 어떤 동작 조건에서도 크로스오버 아래에서 위상 여유가 감소된 지역이 없도록 컨버터를 보상하는 것이 필수적이다.

### ■ 안정 또는 불안정?

크로스오버 이전에 위상이 -180° 아래로 떨어지는 시스템을 불안정한 시스템으로 믿는 경우가 가끔 있다. 이러한 반응을 그림 6에 나타낸다. 위상 곡선은 1kHz 이후 급격히 떨어지고 1.5kHz에서 수kHz 동안 -180° 한계를 통과한다. 그 다음에 다시 올라가 10kHz에서 50°의 위상 여유를 제공한다. 단순히 0dB에서 (3.7)을 충족시키지 않으므로 이 시스템은 안정적이다.

기억할 것은 (3.3)의 분모를 취소하려면 이득 크기가 정확히 1이고 위상 지연이 180° 또는 그 이상이어야 한다는 것이다.

그래프에서는 이 조건이 그림의 어느 곳에서도 만족되지 않는다는 것을 알 수 있다. 그러나 루프가 높은 조건이라는 것을 주목할 필요가 있다. 이득이 수 데시벨 감소하면 위상 여유는 45° 이하로 된다. 추가로 10dB가 감소하면 이번에는 발진 조건을 만족시키는 위상 여유 0의 위험 지역에 들어가게 된다. E E

※ 이 기사는 Artech House, Inc.와의 협의 하에 Christophe Basso가 저술한 『Designing Control Loops for Linear and Switching Power Supplies : A Tutorial Guide(선형 및 스위칭 전원 공급장치를 위한 제어 루프 설계)』(c) 2012 중에서 일부 발췌한 내용입니다.